

Άσκηση 9

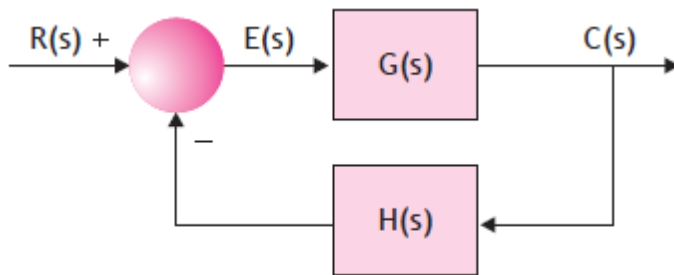
Κριτήριο Nyquist

1. Γενικά

Το κριτήριο Nyquist είναι μια γραφική μέθοδος με την οποία προσδιορίζεται η συμπεριφορά ενός συστήματος Αυτόματου Ελέγχου. Το κριτήριο βασίζεται στα διαγράμματα Nyquist που είναι η σχεδίαση της απόκρισης συχνότητας ενός συστήματος ανοικτού βρόχου σε πολική μορφή.

Ο υπολογισμός του μέτρου και της φάσης μιας συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος ανοικτού βρόχου γίνεται εύκολα αφού βρούμε το μέτρο και τη φάση κάθε παράγοντα της συνάρτησης χωριστά.

Το πλεονέκτημα του διαγράμματος Nyquist είναι ότι ενώ σχεδιάζεται για μετρήσεις συστήματος **ανοικτού βρόχου** προσδιορίζεται η **συμπεριφορά του συστήματος για κλειστό βρόχο**.



$$\Sigma.Μ. = \frac{C(s)}{R(s)} = G(s) \cdot H(s)$$

$$G(j\omega) \cdot H(j\omega) = \frac{M(\omega)}{\Phi(\omega)}$$

όπου

$$M(\omega) = |G(j\omega)H(j\omega)|$$

$$\Phi(\omega) = \angle G(j\omega)H(j\omega)$$

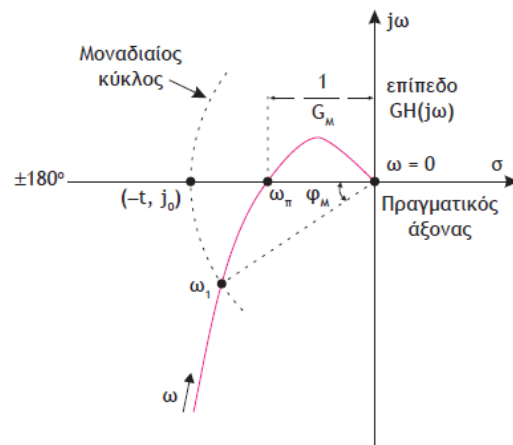
2. Περιθώρια Ενίσχυσης-Φάσης

Βαθμός ευστάθειας (σταθερότητας) ενός συστήματος ονομάζεται το περιθώριο για το οποίο ένα ευσταθές σύστημα περνά στην αστάθεια.

Περιθώριο Ενίσχυσης ονομάζεται ο λόγος

$$G_M = \frac{1}{|G(j\omega)H(j\omega)|}$$

στη συχνότητα ω_p που το διάγραμμα Nyquist τέμνει τον οριζόντιο άξονα (-180°).



Περιθώριο Φάσης είναι η γωνία ϕ_M που ορίζεται από τον πραγματικό άξονα και από το διάνυσμα της Σ.Μ. = $G(j\omega)H(j\omega)$ όταν το μέτρο της είναι μονάδα ($|G(j\omega)H(j\omega)| = 1$).

Τα δύο μεγέθη φαίνονται καθαρά στο Σχήμα 6.2 όπου η γωνία ϕ_M θεωρείται θετική όταν βρίσκεται κάτω του πραγματικού αρνητικού ημιάξονα και αρνητική όταν βρίσκεται πάνω από αυτόν. Είναι φανερό ότι:

- α. $\phi_M < 0$ ή $GM < 1$ το σύστημα είναι **ΑΣΤΑΘΕΣ**
- β. $\phi_M = 0$ ή $GM = 1$ το σύστημα είναι **ΚΡΙΣΙΜΑ ΕΥΣΤΑΘΕΣ**
- γ. $\phi_M > 0$ ή $GM > 1$ το σύστημα είναι **ΕΥΣΤΑΘΕΣ**

3. Διαγράμματα Nyquist και Matlab

Μπορούμε εύκολα με το Matlab και με την εντολή του nyquist να παραστήσουμε γραφικά το διάγραμμα nyquist ενός συστήματος.

Σύνταξη εντολής: Nyquist(num,den)

Όπου

Num Πίνακας με τους όρους του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου του συστήματος.

Den Πίνακας με τους όρους του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου του συστήματος.

Παρατήρηση

Σε αυτή την εντολή ισχύουν ότι και στα **Bode, Nichols** (σε ότι αφορά τις παραλλαγές της εντολής).

Παράδειγμα 1

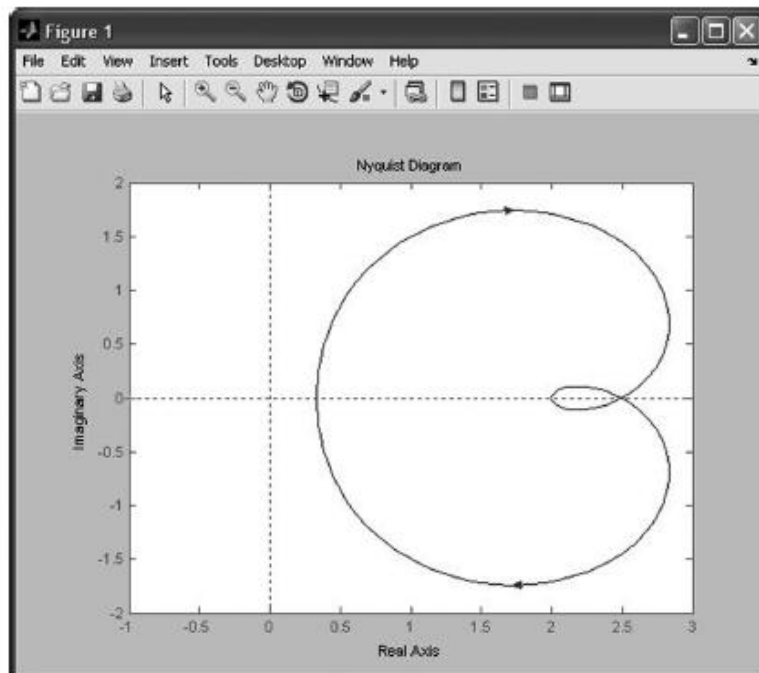
Να σχεδιαστεί το διάγραμμα Nyquist του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \boxed{\frac{2s^2 + 5s + 1}{s^2 + 2s + 3}} \longrightarrow G(s) = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s^2 + 2s + 3} \end{array}$$

Πρόγραμμα

```
>> a = [2 5 1];  
>> b = [1 2 3];  
>> nyquist(a, b)  
>> grid
```

Διάγραμμα Nyquist



4. Διαγράμματα Bode

Στην ανάλυση συστημάτων με τα διαγράμματα Bode, χρησιμοποιούμε τις γραφικές παραστάσεις της απόκρισης συχνότητας ανοικτού βρόχου $GH(\omega)$, συστημάτων συνεχούς ή διακριτού χρόνου. Τα διαγράμματα Bode αποτελούνται από δύο ξεχωριστές γραφικές παραστάσεις:

- Της καμπύλης του πλάτους της $GH(\omega)$ ως συνάρτηση της συχνότητας ω .
- Της καμπύλης της φάσης της $GH(\omega)$ ως συνάρτηση της συχνότητας ω .

Το διαγράμματα Bode είναι:

- Για την ευστάθεια του συστήματος.
- Για το περιθώριο ενίσχυσης.
- Για το περιθώριο φάσης.

Σημείωση:

Τα διαγράμματα Bode έχουν σαν βάση τη λογαριθμική κλίμακα στον άξονα των συχνοτήτων. Η λογαριθμική κλίμακα χρησιμοποιείται, γιατί απλοποιεί κατά πολύ την κατασκευή αλλά και την ερμηνεία των διαγραμμάτων Bode. Στον άξονα των συχνοτήτων (ω), χρησιμοποιείται η λογαριθμική κλίμακα διότι:

- Λαμβάνουμε τις γραφικές παραστάσεις του μέτρου και της φάσης σε μεγάλη περιοχή συχνοτήτων χρησιμοποιώντας το λογαριθμικό άξονα συχνοτήτων.
- Διακρίνονται ομοιόμορφα όλες οι συχνότητες.
- Διαγράμματα (λογαριθμικά) για συστήματα συνεχούς χρόνου συχνά αποτελούνται από ευθύγραμμα τμήματα.

Το μέτρο $|P(\omega)|$ της απόκρισης συχνότητας $P(\omega)$, οποιουδήποτε συστήματος, παριστάνεται γραφικά για οποιαδήποτε τιμή της συχνότητας ω σε λογαριθμικό οριζόντιο άξονα και σε αναλογικό κάθετο άξονα το μέτρο της $P(\omega)$ εκφρασμένο σε decibel βάσει της σχέσης:

$$\text{dB} = 20\log_{10}|P(\omega)|$$

Ορισμοί

Μέτρο μιας συνάρτησης: Λόγω του ότι το decibel είναι λογαριθμική μονάδα, το μέτρο σε dB της απόκρισης συχνότητας μιας συνάρτησης που αποτελείται από το γινόμενο κάποιων όρων, είναι ίσο με το άθροισμα των τιμών του μέτρου σε dB των επιμέρους όρων του γινομένου. Επομένως, και η γραφική παράσταση σε αυτή την περίπτωση μπορεί να αναχθεί σε γραφική παράσταση των επιμέρους όρων.

Διάγραμμα μέτρου Bode: Ονομάζεται η γραφική παράσταση του μέτρου σε dB συναρτήσει του λογάριθμου της συχνότητας ω , $\log(\omega)$.

Διάγραμμα φάσης Bode: Ονομάζεται η γραφική παράσταση της φασικής γωνίας συναρτήσει του λογάριθμου της συχνότητας ω , $\log(\omega)$.

5. Κριτήριο ευστάθειας Bode

Από το διάγραμμα Bode της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη σταθερότητα ή όχι του συστήματος σύμφωνα με το κριτήριο σταθερότητας του Bode.

Κριτήριο ευστάθειας Bode: Ένα σύστημα είναι ασταθές στην περίπτωση που η ενίσχυση του είναι μεγαλύτερη από τη μονάδα ή τα 0 dB σε συχνότητα για την οποία η φάση του συστήματος είναι 180° .

Ορισμοί

Περιθώριο ενίσχυσης: Ως περιθώριο ενίσχυσης G_M της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου ενός συστήματος ορίζεται το αντίστροφο του πλάτους στη συχνότητα ω_π στην οποία η φάση είναι -180° .

$$\text{Τύπος } G_M = \frac{1}{|G(j\omega_\pi)|}$$

όπου ω_π η συχνότητα τομής της καμπύλης φάσης με τον άξονα των -180° .

Περιθώριο Φάσης: Ως περιθώριο φάσης Φ_M ενός συστήματος ανοικτού βρόχου, ορίζεται η γωνία Φ_1 , στην οποία η ενίσχυση είναι μονάδα προστιθέμενη με τη γωνία των 180° .

$$\text{Τύπος } \Phi_M = \angle G(j\omega_\pi) + 180^\circ$$

όπου $|G(j\omega_1)| = 1$ ή 0 dB. Η συχνότητα ω_1 ονομάζεται συχνότητα τομής ενίσχυσης.

Συχνότητα θλάσης: Το σημείο όπου συναντιόνται οι ασύμπτωτες και ισχύει:

$$\omega\tau = 1 \Rightarrow \frac{1}{\tau}$$

ονομάζεται **συχνότητα θλάσης**.

6. Διαγράμματα Bode και Matlab

Το Matlab μας δίνει τη δυνατότητα, με την εντολή **bode()**, να σχεδιάσουμε τα αντίστοιχα διαγράμματα Bode.

Σύνταξη εντολής: **bode(num, den)**

όπου

Num: Πίνακας με τους όρους του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου του συστήματος.

Den: Πίνακας με τους όρους του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου του συστήματος.

Παράδειγμα 2

Να σχεδιαστούν τα διαγράμματα Bode του συστήματος με συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου:

$$G(s) = \frac{10s^2 + s + 75}{10s^4 + 1.2s^3 + 90s^2}$$

Κώδικας

```
>> a = [10 1 75];  
>> b = [10 1.2 90 0 0];  
>> bode(a, b)
```

Παρατήρηση

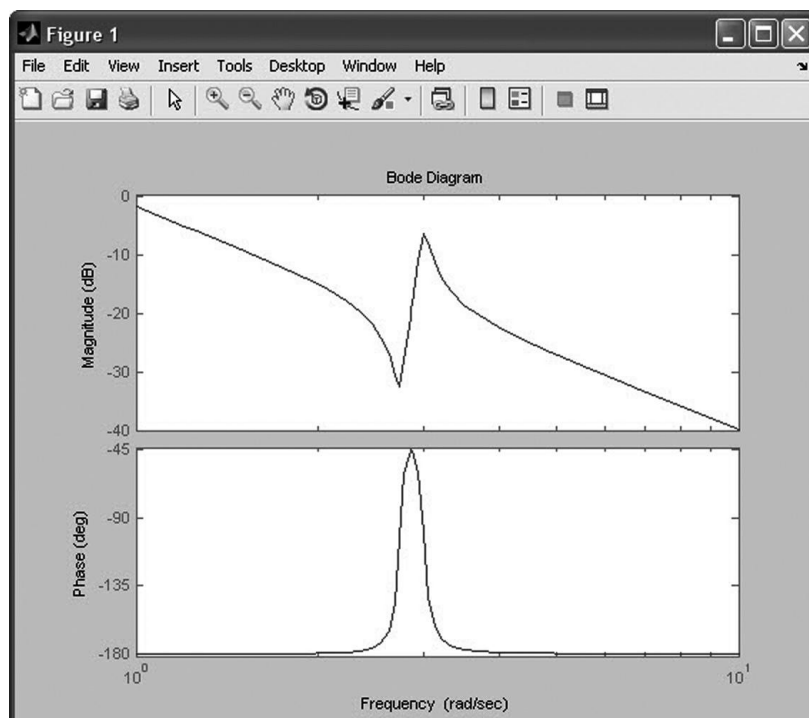
Η σύνταξη της εντολής bode μπορεί να γίνει και με διαφορετικό τρόπο, ανάλογα με το πως θέλει ο χρήστης την έξοδο. Έτσι μπορούμε να: πάρουμε μόνο τις τιμές του μέτρου και της φάσης χωρίς τα διαγράμματα με τη μορφή [mag, phase] = bode(num, den) όπου mag το μέτρο και phase η φάση αντίστοιχα.

Έχουμε το διάγραμμα με τη μορφή που επιθυμεί ο χρήστης (παράδειγμα αντί για συνεχή γραμμή στο διάγραμμα να έχει κύκλους) δηλώνοντας την εντολή με τη μορφή bode(num, den, 'o')

δηλώσουμε την εντολή με τη μορφή bode(sys1) όπου sys1 είναι η μορφή του συστήματος, ανοικτού βρόχου, την οποία έχουμε πάρει με την εντολή tf().

Αποτελέσματα για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις:

Α΄ περίπτωση -Διάγραμμα Bode



B' περίπτωση

Μόνο τις τιμές του μέτρου και της φάσης

Κώδικας

```
>> a = [10 1 75];  
>> b = [10 1.2 90 0 0];  
>> sys1 = tf(a, b)  
>> [mag, phase] = bode(sys1)
```

Αποτελέσματα

```
mag(:, :, 1) = phase(:, :, 1) = 0.8125 -179.9780  
mag(:, :, 2) = phase(:, :, 2) = 0.5544 -179.9565  
mag(:, :, 3) = phase(:, :, 3) = 0.5017 -179.9476  
mag(:, :, 4) = phase(:, :, 4) = 0.3486 -179.8928  
mag(:, :, 5) = phase(:, :, 5) = 0.2570 -179.7931  
mag(:, :, 6) = phase(:, :, 6) = 0.1978 -179.6158  
mag(:, :, 7) = phase(:, :, 7) = 0.1568 -179.3039  
mag(:, :, 8) = phase(:, :, 8) = 0.1262 -178.7535
```

7. Διαγράμματα Bode και η εντολή margin του Matlab

Το Matlab μας δίνει τη δυνατότητα με την εντολή **margin** από τη μια να παίρνουμε τα διαγράμματα Bode και από την άλλη να μας δίνεται απευθείας τα περιθώρια ενίσχυσης και φάσης.

Σύνταξη εντολής: margin(num, den)

όπου

Num: Πίνακας με τους όρους του αριθμητή της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου του συστήματος.

Den: Πίνακας με τους όρους του παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς ανοικτού βρόχου του συστήματος.

Παρατήρηση

Για την εντολή margin ισχύουν τα ίδια με την εντολή Bode.

Παράδειγμα

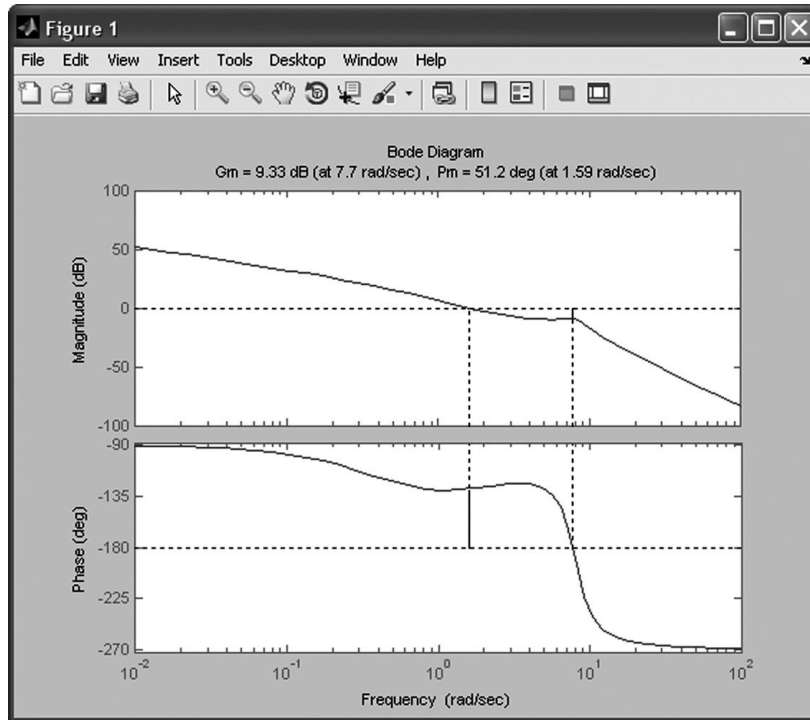
Να γίνει το διάγραμμα bode και να βρεθούν τα περιθώρια φάσης και ενίσχυσης της παρακάτω συνάρτησης.

$$256 s + 512$$

$$4 s^4 + 14.8 s^3 + 262.4 s^2 + 128 s$$

ΚΩΔΙΚΑΣ

```
a=[256 512];  
b=[4 14.8 262.4 128 0];  
sys1=tf(a,b);  
margin(sys1)  
bode(sys1,p)  
grid
```



Στη γραφική παράσταση μπορούμε να διακρίνουμε τόσο το περιθώριο φάσης όσο και ενίσχυσης, από τα οποία μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το σύστημά μας είναι ευσταθές.

Πρακτικό Άσκησης 9

Άσκηση 1

Να γίνουν τα διαγράμματα Bode και Nyquist , να βρεθούν τα περιθώρια φάσης και ενίσχυσης της παρακάτω συνάρτησης και να εξεταστεί η ευστάθεια του συστήματος.

$$\frac{0.5}{s^3 + 2s^2 + s + 0.5}$$

Άσκηση 2

Να γίνουν τα διαγράμματα Bode και Nyquist , να βρεθούν τα περιθώρια φάσης και ενίσχυσης της παρακάτω συνάρτησης και να εξεταστεί η ευστάθεια του συστήματος.

$$\frac{10}{(s + 1)(1 + 0.03s)}$$

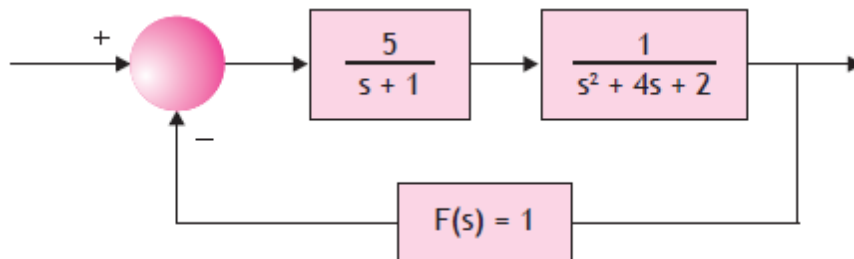
Άσκηση 3

Να γίνουν τα διαγράμματα Bode και Nyquist και να εξεταστεί η ευστάθεια του συστήματος.

$$\frac{s + 1}{(1 + 0.1s)(1 + 0.01s)}$$

Άσκηση 4

Να γίνουν τα διαγράμματα Bode και Nyquist και να εξεταστεί η ευστάθεια του συστήματος.



Άσκηση 5

Να γίνουν τα διαγράμματα Bode και Nyquist και να εξεταστεί η ευστάθεια του συστήματος.

